BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2006

ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННАЯ СИСТЕМА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ГРУППЕ ЛИ

Ф.Б.ШИРИНОВ
Бакинский Государственный Университет

В работе выводится переопределенная система характеристических дифференциальных уравнений. При этом, сперва операторное функциональное уравнение сводится к векторному функциональному уравнению. Затем доказывается, что каждое непрерывно дифференцируемое решение (если оно существует) в окрестности единичного элемента m-мерной группы Ли является решением переопределённой системы дифференциальных уравнений. Выводится условие полной разрешимости переопределённой системы дифференциальных уравнений Ли.

Пусть $G-m$ - мерная группа Ли и $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)$ - набор m - параметров, характеризующих элементы этой группы, E_y -комплексное банахово пространство. Через $M(G;L(E_y;E_y))$ обозначим пространство непрерывных операторнозначных отображений, определенных на группе G, со значениями из алгебры $L(E_y;E_y)$ -эндоморфизмов банахова пространства E_y, снабженной топологией, задаваемой нормой.

Предположим, что единице e группы G соответствует нулевые значения параметров $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$. Пусть $T\in M(G;(E_y;E_y))$. Так как задание параметров однозначно определяет элементы группы G, то оператор $T(g)\in L(E_y;E_y)$ $(g\in G)$ можно рассматривать как функцию от параметров $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$, то есть $T(g)=T(\alpha_1(g),\alpha_2(g),...,\alpha_m(g))=T(\alpha(g))$.

Рассмотрим операторное уравнение вида:

$$T(fg)=T(\alpha_1(fg),\alpha_2(fg),...,\alpha_m(fg))=T(\alpha_1(f),\alpha_2(f),...,\alpha_m(f))\times$$
$$\times T(\alpha_1(g),\alpha_2(g),...,\alpha_m(g)),\ (f,g)\in G, \tag{1}$$

с начальным условием

$$T(e)=I,\quad \left(e\in G,\ I\in L(E_y;E_y)\right), \tag{2}$$

где $T \in M(G;L(E_y;E_y))$, а $I \in L(E_y;E_y)$ - тождественный оператор.

Через $\alpha_i(f)$ $(i=1,2,...,m)$ обозначим параметры, характеризующие элементы f группы G. Если задание параметров $\alpha_i(f),\ \alpha_i(g)\ (i=1,2,...,m)$, однозначно определяет элементы $f,g \in G$, то оно определяет и их произведение $fg \in G$, следовательно, и параметры $\alpha_i(fg)(i=1,2,...,m)$ (см. [1]).

Пусть $\varphi_t(t=1,2,...,m)$ - функции от m параметров, $\alpha_i(f),\alpha_i(g)\ (i=1,2,...,m)$, $\alpha_t(fg)=\varphi_t\{\alpha_1(f),...,\alpha_m(f),\ \alpha_1(g),...,\alpha_m(g)\}$ такие, что $\varphi_t(t=1,2,...,m)$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями от параметров сомножителей. Пользуясь леммой (см.дальше) доказывается, что операторное уравнение (1),(2) эквивалентно следующему векторному функциональному уравнению:

$$y(f)=T(fg)\,y(g^{-1})\ (f,g,g^{-1}\in G), \tag{3}$$

$$y(e)=\eta \quad (e\in G;\ \eta\in E_y), \tag{4}$$

где $T(f)\eta = y(f)\in E_y$, $f\in G$.

Ставится следующая задача:

Найти решения $y(f)\in E_y\ (f\in G)$ функциональной задачи (3),(4), аналитические в окрестности единичного элемента $f=e\in G$.

Пусть $D(f,g)$ - билинейный оператор, определённый на $G\times G$ и со значениями из $L(E_y;E_y)$ пространства эндоморфизмов банахова пространства E_y .Рассмотрим операторное - функциональное уравнение (см. [2]):

$$D(f,g)T(fg)=T(f)T(g), \tag{5}$$

с начальным условием

$$T(e)=I, \tag{6}$$

где $e,f,g\in G,\ I\in L(E_y;E_y)$ - тождественный оператор, $T\in M(G;L(E_y;E_y))$ есть представление группы Ли.

Справедлива следующая

Лемма. Операторное уравнение (5) эквивалентно векторному функциональному уравнению вида:

$$D(fg,g^{-1})y(f)=T(fg)y(g^{-1}), \tag{7}$$

$$y(e)=\eta, \qquad (e\in G,\eta\in E_y), \tag{8}$$

$$y(\alpha(f))=\left\{y^1(\alpha_1(f),...,\alpha_m(f)),...,y^n(\alpha_1(f),...,\alpha_m(f))\right\}\in E_y$$

при каждом $f\in G$.

Доказательство. Пусть $\eta \in E_y$ - произвольный вектор. Возьмем элементы $f \in G$ и $\alpha(g) = \{\alpha_1(g),...,\alpha_m(g)\}$. Пусть $y(g) = T(g)\eta \in E_y$. Ясно, что $T(e)\eta = I\eta = \eta$, значит, $y(e) = \eta$. К вектору $y(g^{-1})$ применим оператор $T(h)$:

$$T(h)y(g^{-1}) = T(h)T(g^{-1})\eta \qquad (g^{-1} \in G).$$

Отсюда по определению представления, имеем:

$$T(h)y(g^{-1}) = D(h,g^{-1})T(hg^{-1})\eta.$$

Положим $hg^{-1} = f$, $h = fg \in G$. Тогда

$$T(fg)y(g^{-1}) = D(fg,g^{-1})y(f). \qquad (*)$$

Из (*) ясно, что $T \in M(G;L(E_y;E_y))$, $D: G \times G \to L(E_y;E_y))$.

Таким образом, $T(fg)y(g^{-1}) \in E_y$; $D(fg,g^{-1})y(f) \in E_y$. Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть билинейный оператор $D(fg,g^{-1}) \equiv I \in L(E_y;E_y)$ и оператор представления группы Ли $T \in M(G;L(E_y;E_y))$ непрерывно дифференцируем в окрестности единичного элемента $f = e \in G$. Тогда каждое непрерывно дифференцируемое решение $y(f)\,(f \in G)$ векторного функционального уравнения

$$y(\alpha(f)) = T(\alpha(fg))y(\alpha(g^{-1})) \qquad (9)$$

удовлетворяет следующей переопределенной системе дифференциальных уравнений Ли:

$$(L_j y)(f) = \left\{\frac{\partial}{\partial\alpha_j(f)} - \sum_{i=1}^{m} C_{ij}(f)A_i\right\} y(f) = 0, \qquad (10)$$

где $L_1, L_2, \dots, L_n$ - характеристические дифференциальные операторы Ли [3]:

$$(L_j \equiv \frac{\partial}{\partial\alpha_j(f)} - \sum_{i=1}^{m} C_{ij}(f)A_i\ ,\ j = 1,2,...,m),\ C(f) = \{C_{ij}(f)\},$$

где $m \times m$-матрица, такая, что при $f = e \in G$

$C(f) = C(e) = \{C_{ij}(e)\} = \delta_{ij}$, δ_{ij} -символ Кронекера, $A_i \in L(E_y;E_y)$ $(i = 1,2,...m)$ -постоянные ограниченные операторы.

Доказательство. Предположим, что $y \in E_y$ является непрерывно дифференцируемым решением векторного функционального уравнения (9). Подставляя это решение в (9), получим тождество:

$$y(\alpha(f)) = T(\alpha(fg))y(\alpha(g^{-1})) \ . \qquad (11)$$

Продифференцировав тождество (9) по элементу $\alpha_j(f)$ имеем:

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha_j(f)} = \sum_{i=1}^{m} \left\{ \frac{\partial T(fg)}{\partial \alpha_i(fg)} \frac{\partial \varphi_i(fg)}{\partial \alpha_j(f)} y(g^{-1}) \right\}, \ (j = 1,2,...,m) \ . (12)$$

В системе уравнений (12) положим $f = g^{-1} \in G$ и примем следующие обозначения:

$$\left\{ \frac{\partial T(fg)}{\partial \alpha_i(fg)} \right\}_{f=g^{-1}} = A_i (i = 1,2,...,n); \quad \left\{ \frac{\partial \varphi_i(fg)}{\partial \alpha_j(f)} \right\}_{f=g^{-1}} = C_{ij}(f)$$

$$(i, j = 1,2,...,m) \ . (13)$$

Учитывая (13) в системе уравнений (12) получаем:

$$\frac{\partial y(f)}{\partial \alpha_j(f)} = \sum_{i=1}^{m} C_{ij}(f) A_i y(f), \quad j = 1,2,...,m \, ,$$

$$L_j(y)(f) = \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_j(f)} = \sum_{i=1}^{m} C_{ij}(f) A_i \right\} y(f) = 0, \quad j = 1,2,...,m \, .$$

(14)

Здесь $L_1, L_2, ..., L_m \quad (L_j = \frac{\partial}{\partial \alpha_j(f)} - \sum_{i=1}^{m} C_{ij}(f) A_i) \quad (j = 1,2,...,m)$ есть дифференциальные операторы Ли, $C(f) = \{c_{ij}(f)\} (i, j = 1,2,...,m)$ - $m \times m$-матрица.

Теорема 1 полностью доказана.

Определение. Если переопределенная система характеристических дифференциальных уравнений (14) имеет единственное решение $y(f) \in E_y \ (f \in G)$ при любых начальных данных $(e,\eta) \in (G_0 \times E_0) \subset G \times E_y$, где $G_0 \subset G, E_0 \subset E_y$ - открытые подмножества в G и E_y соответственно, то переопределенная система (14) называется вполне интегрируемой или вполне разрешимой (см.[4]). Возникает проблема, при каких условиях переопределенная система дифференциальных уравнений (14) будет вполне разрешимой?

Верна следующая

Теорема 2. Пусть $A_i \in L(E_y; E_y)(i = 1,2,...,m)$ - постоянные ограниченные операторы. Далее, предположим, что матрица $C(f) = \{c_{ij}(f)\} (i, j = 1,2,..,m)$ - непрерывно дифференцируема в окрестности единичного элемента $f = e \in G$. Тогда переопределенная система дифференциальных уравнений вполне разрешима тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{m} C_{sk}(f)C_{ij}(f)\left[A_i A_s - A_s A_i\right] = \sum_{i=1}^{m}\left\{\frac{\partial C_{ik}(f)}{\partial \alpha_j(f)} - \frac{\partial C_{ij}(f)}{\partial \alpha_k(f)}\right\}A_i,$$

$$k, j = 1,2,\ldots,m. \qquad (15)$$

Доказательство. Пусть $y(f)$ является решением переопределенной системы дифференциальных уравнений (15). Подставляя это решение в (14), получим тождество:

$$\frac{\partial y(f)}{\partial \alpha_j(f)} = \sum_{i=1}^{m} C_{ij}(f)A_i y(f), \quad j = 1,2,\ldots,m. \qquad (16)$$

Продифференцировав систему уравнений (16) по элементу $\alpha_k(f)$, получим:

$$\frac{\partial^2 y(f)}{\partial \alpha_j(f)\partial \alpha_k(f)} = \sum_{i=1}^{m}\left\{\frac{\partial C_{ij}(f)}{\partial \alpha_k(f)}A_i y(f) + C_{ij}(f)A_i \frac{\partial y(f)}{\partial \alpha_k(f)}\right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left\{\frac{\partial C_{ij}(f)}{\partial \alpha_k(f)}A_i y(f) + C_{ij}(f)A_i\left[\sum_{s=1}^{m} C_{sk}(f)A_s y(f)\right]\right\} =$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial C_{ij}(f)}{\partial \alpha_k(f)}A_i y(f) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{m} C_{ij}(f)C_{sk}(f)A_i A_s y(f).$$

Отсюда имеем:

$$\frac{\partial^2 y(f)}{\partial \alpha_j(f)\partial \alpha_k(f)} = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial C_{ij}(f)}{\partial \alpha_k(f)}A_i y(f) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{m} C_{ij}(f)C_{sk}(f)A_i A_s y(f)$$

$$(j,k = 1,2,\ldots,m.) \quad (17)$$

Из соотношения (17),меняя порядок дифференцирования, получим:

$$\frac{\partial^2 y(f)}{\partial \alpha_k(f)\partial \alpha_j(f)} = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial C_{ik}(f)}{\partial \alpha_j(f)}A_i y(f) + \sum_{s=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} C_{sk}(f)C_{ij}(f)A_s A_i y(f)$$

$$(j,k = 1,2,\ldots,m.) \quad (18)$$

В силу симметричности вторых дифференциалов $\frac{\partial^2}{\partial \alpha_j \partial \alpha_k}$ и $\frac{\partial^2}{\partial \alpha_k \partial \alpha_j}$ из (17) и (18) имеем:

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial C_{ij}(f)}{\partial \alpha_k(f)}A_i y(f) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{m} C_{ij}(f)C_{sk}(f)A_i A_s y(f) = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial C_{ik}(f)}{\partial \alpha_j(f)}A_i y(f) +$$

$$+\sum_{s=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} C_{sk}(f)C_{ij}(f)A_s A_i y(f) \quad (j,k = 1,2,\ldots,m). \ (19)$$

Теперь ведя группировки членов равенства (19), получим:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{m} C_{sk}(f)C_{ij}(f)\left[A_iA_s - A_sA_i\right]y(f) = \sum_{i=1}^{m}\left\{\frac{\partial C_{ik}(f)}{\partial\alpha_j(f)} - \frac{\partial C_{ij}(f)}{\partial\alpha_k(f)}\right\}A_i y(f),$$

$$j,k = 1,2,\ldots,m. \qquad (20)$$

Из этих векторных соотношений получим операторные перестановочные соотношения:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{m} C_{sk}(f)C_{ij}(f)\left[A_iA_s - A_sA_i\right] = \sum_{i=1}^{m}\left\{\frac{\partial C_{ik}(f)}{\partial\alpha_j(f)} - \frac{\partial C_{ij}(f)}{\partial\alpha_k(f)}\right\}A_i,$$

$$j,k = 1,2,\ldots,m. \quad (21)$$

Теорема 2 доказана.

Отметим, что условия (21) называются условиями вполне интегрируемости для переопределенной системы дифференциальных уравнений (17).

Следует отметить, что соотношения (21) справедливы для любых $(f, y(f))$. В частности, при $f = e \in G$ и $y(f)_{f=e} = y(e) = \eta \in E_y$ из (21) получаем:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}\left[C_{sk}(f)C_{ij}(f)\right]_{f=e}\left[A_iA_s - A_sA_i\right]y(f)_{f=e} = \sum_{i=1}^{m}\left\{\frac{\partial C_{ik}(f)}{\partial\alpha_j(f)} - \frac{\partial C_{ij}(f)}{\partial\alpha_k(f)}\right\}_{f=e} A_i y(f)$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}\delta_{sk}\delta_{ij}\left[A_iA_s - A_sA_i\right]\eta = \sum_{i=1}^{m} D_{ijk}A_i\eta\ , \quad \forall\eta\in E_y,$$

где

$$\delta_{ij} = \begin{cases}1, & i = j\\ 0, & i \neq j\end{cases}, \quad \delta_{sk} = \begin{cases}1, & s = k,\\ 0, & s \neq k;\end{cases} \quad D_{ijk} = \left\{\frac{\partial C_{ik}(f)}{\partial\alpha_j(f)} - \frac{\partial C_{ij}(f)}{\partial\alpha_k(f)}\right\}_{f=e} -$$

структурные константы группы Ли, $D_{ijk} = -D_{ikj}\ \ (i, j, k = 1,2,\ldots,m)$.

Таким образом, получаем, что

$$A_jA_k - A_kA_j = \sum_{i=1}^{m} D_{ijk}A_i\ , \ j,k = 1,2,\ldots,m. \qquad (22)$$

Оказывается перестановочные операторные соотношения (22) являются необходимыми и достаточными условиями для полной разрешимости переопределенной системы дифференциальных уравнений (14). Это раскрывает сущность и широкую область применимости трех известных фундаментальных теорем норвежского математика Софуса Ли (см. [5]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Любарский Г.Я. Теория групп и ее применение в физике. М.: Физматгиз,

1958, 354с.
2. Вигнер Е. Теория групп и ее приложения к квантово-механической теории атомных спектров. М., Изд-во иностр., лит., 1961, 440с.
3. Вандер Варден Б.Л. Метод теории групп в квантовой механике. ДНТВУ, Харьков, 1938, 119с.
4. Ширинов Ф.Б. Аналитические решения переопределенных систем дифференциальных уравнений на группе Ли / Тезисы докладов научной конференции студ. и молод. ученых мех.-мат. факультета БГУ, Баку, 1998, с.26-27.
5. Хилле Э.И., Филлипс Р.М. Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962, 829с.

Lİ QRUPUNDA ARTIQLAŞMIŞ XARAKTERİSTİK DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR SİSTEMİ

F.B.ŞİRİNOV

XÜLASƏ

Bu məqalədə Li qrupunda verilmiş bir sinif operator funksional tənliklər sisteminə baxılır. Əvvəlcə operator tənliklər sistemi vektor tənliklər sisteminə gətirilir. Sonra isə isbat edilir ki, vektor tənliklər sistemi artıqlaşmış xüsusi törəməli diferensial tənliklər sisteminə ekvivalentdir. Alınan tənliyin tam həll olunması üçün zəruri və kafi şərtlər tapılır.

THE OVERDETERMINED SYSTEM OF CHARACTERISTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS ON THE LIE GROUP

F.B.SHIRINOV

SUMMARY

In this work the overdetermined system of the characteristic differential equations is deduced. For this, first of all the operational functional equation is reduced to the vector functional equation. Then it is proved, that each continuously differentiable (if it exists) at the neigh bound of identify is a solution overdetermined system of the differential equations. The condition of full solvability of the overdetermined system of the differential equations Lie group.